

## 15.1

$$4 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 6^2 + \dots + 4 \cdot 6^7$$

On laskettava geometrisen jonon 8:n ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_8 = \frac{4 \cdot (1 - 6^8)}{1 - 6}$$

$$= 1\,343\,692$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}, \text{ missä}$$

$$a_1 = 4, \quad q = 6 \text{ ja } n = 8.$$

**Vastaus**

1 343 692

## 15.2

Jonon ensimmäinen jäsen  $a_1 = 7$ .

Jonon suhdeluku  $q = \frac{21}{7} = 3$ .

On laskettava geometrinen summa  $7 + 7 \cdot 3 + 7 \cdot 3^2 + \dots + 7 \cdot 3^9$ .

$$S_8 = \frac{7 \cdot (1 - 3^{10})}{1 - 3}$$
$$= 206\,668$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}, \text{ missä}$$
$$a_1 = 7, \quad q = 3 \text{ ja } n = 10.$$

**Vastaus**

206 668

## 15.3

$$100 \% - 30 \% = 70 \% = 0,7$$

Seuraavan kuukauden myynti saadaan aina kertomalla edellisen kuukauden myynti luvulla 0,7. Kuukausimyyntit muodostavat geometrisen jonon, jossa  $a_1 = 6000$  ja  $q = 0,7$ .

On laskettava geometrisen lukujonon 12:n ensimmäisen jäsenen summa

$$6000 + 6000 \cdot 0,7 + 6000 \cdot 0,7^2 + \dots + 6000 \cdot 0,7^{11}.$$

$$S_{12} = \frac{6000 \cdot (1 - 0,7^{12})}{1 - 0,7}$$

$$\approx 19\,700$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, \text{ missä}$$

$$a_1 = 6000, \quad q = 0,7 \text{ ja } n = 12.$$

Kirjoja myytiin ensimmäisen vuoden aikana 19 700 kappaletta.

### Vastaus

$$S_{12} = 19\,700$$

## 15.4

Ensimmäisen viikon aikana lähetettyjen päivittäisten viestien lukumäärät muodostavat lukujonon, jossa

$$a_1 = 77$$

$$a_2 = 93$$

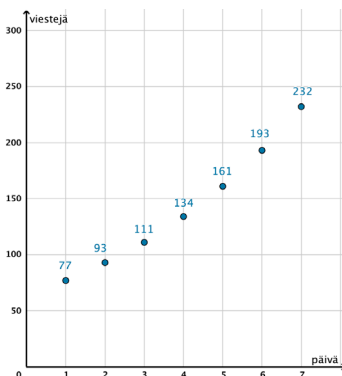
$$a_3 = 111$$

$$a_4 = 134$$

$$a_5 = 161$$

$$a_6 = 193$$

$$a_7 = 232$$



Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteita.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{93}{77} \approx 1,21$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{111}{93} \approx 1,19$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{134}{111} \approx 1,21$$

$$\frac{a_5}{a_4} = \frac{161}{134} \approx 1,20$$

$$\frac{a_6}{a_5} = \frac{193}{161} \approx 1,20$$

$$\frac{a_7}{a_6} = \frac{232}{193} \approx 1,20$$

Havaitaan, että seuraavan päivän viestien lukumäärä saadaan aina kertomalla edellisen päivän viestien lukumäärä likimain luvulla 1,20.

Päivittäisten viestien määrät muodostavat likimain geometrisen jonon, jossa  $a_1 = 77$  ja  $q = 1,20$ . Lasketaan tämän jonon 30 ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{30} = \frac{77 \cdot (1 - 1,20^{30})}{1 - 1,20} \approx 91\,000$$

Ensimmäisten 30 päivän aikana lähetetään noin 91 000 viestiä.

### **Vastaus**

91 000

### **Huomaa!**

Suhdeluvun  $q$  arvon voi etsiä myös appletin liukusäätimen avulla.

## 15.5

Merkitään tarvittavien yhteenlaskettavien lukumäärää kirjaimella  $n$ .

Summan  $S_n$  on oltava suurempi kuin 50. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $n$ .

$$S_n = 50$$

$$\frac{1 \cdot (1 - 0,99^n)}{1 - 0,99} = 50$$

$$n \approx 68,97$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}, \text{ missä}$$

$$a_1 = 1 \text{ ja } q = 0,99$$

Jonon termit ovat positiivisia, joten summan arvo kasvaa sitä suuremmaksi, mitä enemmän jäseniä lasketaan yhteen.

On siis laskettava yhteen vähintään 69 termiä jonon alusta, jotta summa olisi suurempi kuin 50.

### **Vastaus**

vähintään 69

## 15.6

Merkitään tarvittavien yhteenlaskettavien lukumäärää kirjaimella  $n$ .

Summan  $S_n$  on oltava pienempi kuin 2000. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $n$ .

$$S_n = 2000$$

$$\frac{3 \cdot (1 - 1,2^n)}{1 - 1,2} = 2000$$

$$n \approx 26,9$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}, \text{ missä}$$

$$a_1 = 3 \text{ ja } q = 1,2$$

Jonon termit ovat positiivisia, joten summan arvo kasvaa sitä suuremmaksi, mitä enemmän termejä lasketaan yhteen.

Voidaan siis laskea yhteen korkeintaan 26 jäsentä jonon alusta, jotta niiden summa on pienempi kuin 2000.

### Vastaus

korkeintaan 26

## 15.7

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad S_{13} &= \frac{1 \cdot (1 - (-2)^{13})}{1 - (-2)} \\ &= 2731\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}, \text{ missä} \\ a_1 &= 1, \quad q = -2 \text{ ja } n = 13.\end{aligned}$$

$$\text{b)} \text{ Jonon suhdeluku on } q = \frac{-12}{4} = -3.$$

$$\begin{aligned}S_{13} &= \frac{4 \cdot (1 - (-3)^{13})}{1 - (-3)} \\ &= 1\,594\,324\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}, \text{ missä} \\ a_1 &= 4, \quad q = -3 \text{ ja } n = 13.\end{aligned}$$

### Vastaus

$$\text{a)} \quad S_{13} = 2731$$

$$\text{b)} \quad S_{13} = 1\,594\,324$$



## 15.8

- a) Jonon suhdeluku on  $q = \frac{3}{1} = 3$ .

$$S_9 = \frac{1 \cdot (1 - 3^9)}{1 - 3} = 9841$$

Oikea vaihtoehto on 3.

- b) Jonon suhdeluku on  $q = \frac{-1}{1} = -1$ .

$$S_9 = \frac{1 \cdot (1 - (-1)^9)}{1 - (-1)} = 1$$

Oikea vaihtoehto on 1.

- c) Jonon suhdeluku on  $q = \frac{1}{-1} = -1$ .

$$S_9 = \frac{-1 \cdot (1 - (-1)^9)}{1 - (-1)} = -1$$

Oikea vaihtoehto on 4.

- d) Jonon suhdeluku on  $q = \frac{-6}{2} = -3$ .

$$S_9 = \frac{2 \cdot (1 - (-3)^9)}{1 - (-3)} = 9842$$

Oikea vaihtoehto on 2.

### Vastaus

- a) 3   b) 1   c) 4   d) 2

## 15.9

Geometrisen jonon suhdeluku on  $q = 4$  ja kymmenen ensimmäisen jäsenen (eli termin) summa  $S_{10} = 3\,844\,775$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan jonon ensimmäinen jäsen  $a_1$ .

$$S_{10} = 3\,844\,775$$

$$\frac{a_1 \cdot (1 - 4^{10})}{1 - 4} = 3\,844\,775$$

$$a_1 = 11$$

Lasketaan jonon kymmenes jäsen  $a_{10}$ .

$$a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1} = 11 \cdot 4^9 = 2\,883\,584$$

### Vastaus

$$a_1 = 11$$

$$a_{10} = 2\,883\,584$$

## 15.10

$$100 \% + 5 \% = 105 \% = 1,05$$

Seuraavan päivän voimistelun kesto saadaan aina kertomalla edellisen päivän kesto luvulla 1,05. Ajat muodostavat geometrisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen on  $a_1 = 15$  (min) ja suhdeluku  $q = 1,05$ .

**a)** lasketaan 30:n päivän voimistelun kesto.

$$\begin{aligned} a_{30} &= a_1 \cdot q^{30-1} \\ &= 15 \cdot 1,05^{29} \\ &\approx 62 \text{ (min)} \end{aligned}$$

30. päivänä voimisteluun kuluu 62 min.

**b)** Oletetaan, että kuukaudessa on 30 päivää. Lasketaan päivittäisten voimisteluajkojen summa.

$$\begin{aligned} S_{30} &= \frac{15 \cdot (1 - 1,05^{30})}{1 - 1,05} \\ &\approx 997 \text{ (min)} \end{aligned}$$

Voimisteluun kuluu aikaa yhteensä  $997 \text{ min} = 16 \text{ h } 37 \text{ min}$ .

### Vastaus

**a)** 62 min

**b)**  $997 \text{ min} = 16 \text{ h } 37 \text{ min}$

## 15.11

viikko	viestin tavoittamat henkilöt
1	3
2	$3 \cdot 3 = 9$
3	$3 \cdot 9 = 27$
4	$3 \cdot 27 = 81$
$\vdots$	$\vdots$

Seuraavalla viikolla tavoitettujen henkilöiden lukumäärä saadaan aina kertomalla edellisellä viikolla tavoitettujen henkilöiden määrä luvulla 3. Luvut muodostavat geometrisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen on  $a_1 = 3$  ja suhdeluku  $q = 3$ .

Valeutinen on tavoittanut kaikki suomalaiset aikaisintaan sillä viikolla, jolla viikottain tavoitettujen henkilöiden lukumäärien summa on 5,5 miljoonaa. Tällöin vaaditaan, että kukaan ei ole saanut viestiä usemmin kuin kerran.

Merkitään viikon järjestysnumeroa kirjaimella  $n$ . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $n$ .

$$S_n = 5\,500\,000$$

$$\frac{3 \cdot (1 - 3^n)}{1 - 3} = 5\,500\,000$$

$$n \approx 13,8$$

Aikaa kuluu 13 täyttä viikkoa ja 0,8 vajaa viikko tämän lisäksi. Valeutinen voi siis tavoittaa kaikki 5,5 miljoonaa suomalaista aikaisintaan viikolla 14.

### Vastaus

viikolla 14

## 15.12

$$S_{25} = \frac{3 \cdot (1 - 1,5^{25})}{1 - 1,5} \approx 151\,501,0$$

### **Vastaus**

$$S_{25} \approx 151\,501,0$$

## 15.13

**a)** Jonon suhdeluku  $q = \frac{-9 \cdot 8}{9} = -8$ .

$$S_9 = \frac{9 \cdot (1 - (-8)^9)}{1 - (-8)} = 134\,217\,729$$

**b)** Jonon suhdeluku  $q = \frac{-10}{1} = -10$ .

$$S_9 = \frac{1 \cdot (1 - (-10)^9)}{1 - (-10)} = 90\,909\,091$$

### Vastaus

**a)**  $S_9 = 134\,217\,729$

**b)**  $S_9 = 90\,909\,091$

## 15.14

$$100 \% + 7 \% = 107 \% = 1,07$$

Seuraavan vuoden vuokra saadaan aina kertomalla edellisen vuoden vuokra luvulla 1,07. Vuosivuokrat muodostavat geometrisen jonon, jossa  $q = 1,07$  ja  $a_1 = 4000$  (€).

Lasketaan kymmenen ensimmäisen vuoden vuokra eli lukujonon 10 ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{10} = \frac{4000 \cdot (1 - 1,07^{10})}{1 - 1,07} \approx 55\,266 \text{ (€)}$$

10 ensimmäisen vuoden vuokra on 55 266 euroa.

**Vastaus**

55 266 €

## 15.15

$$100 \% + 25 \% = 125 \% = 1,25$$

Kuukauden myyntimäärä saadaan kertomalla aina edellisen kuukauden myyntimäärä luvulla 1,25. Kuukausien myyntimäärät muodostavat geometrisen jonon, jossa  $q = 1,25$  ja  $a_1 = 470$ .

- a) Kesäkuun myyntimäärän ilmoittaa lukujonon seitsemäs jäsen.

$$a_7 = 470 \cdot 1,25^{7-1} \approx 1792,9 \approx 1790$$

Kesäkuun myynti olisi 1790 pesukonetta.

- b) On laskettava 24 kk myynti ajanjaksolla tammikuu 2001 – joulukuu 2002. Lasketaan lukujonon 25 jäsenen summa ja vähennetään summasta jo toteutunut vuoden 2000 joulukuun myynti 470 kpl

$$\begin{aligned} S_{25} - 470 &= \frac{470 \cdot (1 - 1,25)^{25}}{1 - 1,25} - 470 \\ &\approx 495\,281,9 \\ &\approx 495\,000 \end{aligned}$$

Kahden vuoden myynti olisi 495 000 pesukonetta.

### Vastaus

- a) 1790  
b) 495 000



## 15.16

$$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1}$$

$$a_6 = a_1 \cdot q^{6-1}$$

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan lukujonon ensimmäinen jäsen  $a_1$  ja suhdeluku  $q$ .

$$\begin{cases} a_3 = 81 \\ a_6 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot q^2 = 81 \\ a_1 \cdot q^5 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 729 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Lasketaan jonon 7 ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_7 = \frac{729 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^7\right)}{1 - \frac{1}{3}} = 1093$$

**Vastaus**

$$S_7 = 1093$$

## 15.17

a)  $a_1 = 1$  ja  $q = \frac{7}{1} = 7$

Lasketaan jonon 10 ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{10} = \frac{1 \cdot (1 - 7^{10})}{1 - 7} = 47\,079\,208$$

b)  $a_1 = 4$  ja  $q = \frac{4^2}{4} = 4$

Lasketaan jonon 9 ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_9 = \frac{4 \cdot (1 - 4^9)}{1 - 4} = 349\,524$$

c)  $a_1 = 7 \cdot 5 = 35$  ja  $q = \frac{7 \cdot 5^2}{7 \cdot 5} = 5$

Lasketaan jonon 8 ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_8 = \frac{35 \cdot (1 - 5^8)}{1 - 5} = 3\,417\,960$$

### Vastaus

a)  $S_{10} = 47\,079\,208$

b)  $S_9 = 349\,524$

c)  $S_8 = 3\,417\,960$

## 15.18

$$100 \% + 5 \% = 105 \% = 1,05$$

Seuraavan vuoden palkka saadaan aina kertomalla edellisen vuoden palkka luvulla 1,05. Vuosipalkat muodostavat geometrisen jonon.

Jonon viiden ensimmäisen jäsenen summa on 200 000 euroa.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan ensimmäisen vuoden palkka  $a_1$ .

$$S_5 = 200\,000$$

$$\frac{a_1 \cdot (1 - 1,05^5)}{1 - 1,05} = 200\,000$$

$$a_1 \approx 36\,194,9596$$

Ensimmäisen vuoden palkka on 36 194,9596 euroa. Ensimmäisen vuoden ajan kuukausipalkka on

$$\frac{36\,194,9596}{12} \approx 3016 \text{ (€)}.$$

**Vastaus**

3016 €

## 15.19

Merkitään yhteenlaskettavien jäsenten lukumäärää kirjaimella  $n$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $n$ .

$$S_n = 1000$$

$$\frac{1 \cdot (1 - 1,2^n)}{1 - 1,2} = 1000$$

$$n \approx 29,1$$

Lukujonon jäsenet ovat positiivisia, joten summan arvo kasvaa sitä suuremmaksi, mitä useampia jäseniä lasketaan yhteen.

Jotta summa ylittäisi arvon 1000, on laskettava yhteen vähintään 30 jäsentä jonon alusta lukien.

### **Vastaus**

vähintään 30 jäsentä

## 15.20

$$100 \% - 20 \% = 80 \% = 0,8$$

Seuraavan vuoden myyntimäärä saadaan aina kertomalla edellisen vuoden myyntimäärä luvulla  $0,8$ . Vuosien myyntimäärät muodostavat geometrisen jonon, jossa  $a_1 = 6000$  ja  $q = 0,8$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vuosien lukumäärä  $n$ .

$$S_n = 28\,500$$

$$\frac{6000 \cdot (1 - 0,8^n)}{1 - 0,8} = 28\,500$$

$$n \approx 13,4$$

Kirjasta otettu painos riittää noin 13 vuodeksi.

### Vastaus

13 vuodeksi

## 15.21

Kolme viidestä videon saaneesta henkilöstä lähettää sen edelleen viidelle henkilölle.

päivä	videon tavoittamat henkilöt
1	5
2	$3 \cdot 5 = 15$
3	$\frac{3}{5} \cdot 15 \cdot 5 = 3 \cdot 15 = 45$
4	$\frac{3}{5} \cdot 45 \cdot 5 = 3 \cdot 45 = 135$
$\vdots$	$\vdots$

Seuraavana päivänä tavoitettujen henkilöiden lukumäärä saadaan aina kertomalla edellisenä päivänä tavoitettujen henkilöiden määrä luvulla 3. Luvut muodostavat geometrisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen on  $a_1 = 5$  ja suhdeluku  $q = 3$ . Video on tavoittanut kaikki maapallon asukkaat aikaisintaan päivänä, jona tavoitettujen henkilöiden lukumäärien summa on 8 miljardia. Tällöin vaaditaan, että kukaan ei ole saanut videota usemmin kuin kerran.

Merkitään päivän järjestysnumeroa kirjaimella  $n$ . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $n$ .

$$S_n = 8\,000\,000\,000$$

$$\frac{5 \cdot (1 - 3^n)}{1 - 3} = 8\,000\,000\,000$$

$$n \approx 19,9$$

Aikaa kuluu 19 täyttä päivää ja 0,9 päivää tämän lisäksi. Video voi siis tavoittaa kaikki maapallon 8 miljardia asukasta aikaisintaan tammikuun 20. päivänä.

### Vastaus

tammikuun 20. päivänä

## 15.22

$$100 \% + 6 \% = 106 \% = 1,06$$

Vuosi 2007 oli yrityksen 1. toimintavuosi.

Koska  $2019 - 2006 = 13$ , niin vuosi 2019 oli yrityksen 13. toimintavuosi.

Yrityksen seuraavan vuoden voitto saadaan aina kertomalla edellisen vuoden voitto luvulla 1,06.

Vastaavasti edellisen vuoden voitto saadaan aina jakamalla seuraavan vuoden voitto luvulla 1,06 eli kertomalla seuraavan vuoden voitto luvulla  $\frac{1}{1,06}$ .

Vuotuiset voitot alkaen vuodesta 2019 taaksepäin muodostavat geometrisen jonon, jossa  $a_1 = 84\,000$  (€) ja  $q = \frac{1}{1,06}$ . Vuoden 2007 voitto on tällöin  $a_{13}$ .

Yrityksen vuosina 2007 – 2019 tuottama voitto saadaan laskemalla yhteen geometrisen jonon 13 ensimmäistä jäsentä.

$$S_{13} = \frac{84\,000 \cdot \left(1 - \frac{1}{1,06}\right)^{13}}{1 - \frac{1}{1,06}} \approx 788\,000 \text{ (€)}$$

Yritys on tuottanut kaikkiaan voittoa 788 000 ruroa.

**Vastaus**

788 000 €

## 15.23

Luetellaan lukujonon jäseniä.

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 \cdot \frac{2}{3} + 1$$

$$a_3 = \left( 2 \cdot \frac{2}{3} + 1 \right) \cdot \frac{2}{3} + 1 = 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{2}{3} + 1$$

$$a_4 = \left( 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{2}{3} + 1 \right) \cdot \frac{2}{3} + 1 = 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^3 + \left( \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{2}{3} + 1$$

$$a_5 = \left( 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^3 + \left( \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{2}{3} + 1 \right) \cdot \frac{2}{3} + 1 = 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^4 + \left( \frac{2}{3} \right)^3 + \left( \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{2}{3} + 1$$

$$\begin{aligned} a_6 &= \left( 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^4 + \left( \frac{2}{3} \right)^3 + \left( \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{2}{3} + 1 \right) \cdot \frac{2}{3} + 1 \\ &= 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^5 + \left( \frac{2}{3} \right)^4 + \left( \frac{2}{3} \right)^3 + \left( \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{2}{3} + 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
a_7 &= \left( 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^5 + \left( \frac{2}{3} \right)^4 + \left( \frac{2}{3} \right)^3 + \left( \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{2}{3} + 1 \right) \cdot \frac{2}{3} + 1 \\
&= 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^6 + \underbrace{\left( \frac{2}{3} \right)^5 + \left( \frac{2}{3} \right)^4 + \left( \frac{2}{3} \right)^3 + \left( \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{2}{3} + 1}_{\text{geometrinen summa, jossa } a_1=1, q=\frac{2}{3} \text{ ja } n=6} \\
&= 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^6 + \frac{1 \cdot \left( 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^6 \right)}{1 - \frac{2}{3}} \\
&= 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^6 + \frac{1 - \left( \frac{2}{3} \right)^6}{\frac{1}{3}} \\
&= 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^6 + \left( 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^6 \right) \cdot 3 \\
&= 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^6 + 3 - 3 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^6 \\
&= 3 - \left( \frac{2}{3} \right)^6
\end{aligned}$$

Saatiin osoitettua, että  $a_7 = 3 - \left( \frac{2}{3} \right)^6$ .  $\square$